

УДК 681.514:62 – 503.56(045)

Білак Н.В., к.т.н., доцент,  
Польова А.М.,  
Юзич Н.А.

## СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ СПОСТЕРІГАЧА ВИХІДНОГО СТАНУ БАГАТОВИМІРНОГО ОБ'ЄКТА З ДОВІЛЬНОЮ ДИНАМІКОЮ ПРИ ВИПАДКОВИХ ВПЛИВАХ

Національний авіаційний університет

[ian@nau.edu.ua](mailto:ian@nau.edu.ua)

*Запропоновано процедуру синтезу оптимальної структури спостерігача вихідного стану багатовимірного об'єкта з довільною динамікою при випадкових збуреннях. Надано варіант розв'язку задачі шляхом розділення об'єкта на дві частини (стійкий та нестійкий канали), для кожного з яких будуються окремо два спостерігачі вихідного стану багатовимірного об'єкта*

**Ключові слова:** система з довільною динамікою, синтез оптимального спостерігача вихідного стану об'єкта

### Вступ

Для успішного вирішення задач аналітичного конструювання систем управління складними динамічними об'єктами [1] необхідно знати реальні динамічні характеристики основних частин системи, що проектується, сигналів, збурень і завад у системі. Такі відомості отримують, в основному, за результатами проведення етапів оцінювання станів базових ланок системи чи їх прототипів, та етапів ідентифікації. *Методи оцінювання* у темпі з процесом дозволяють в умовах випадкових похибок, шумів і збурень оцінювати навіть ті координати вектору стану, які безпосередньо не вимірюються. Етапи оцінювання та ідентифікації важливі ще й через те, що вони можуть складати частину алгоритмів управління складними системами, наприклад, адаптивного управління, а також становлять основу процесів атестації якості складних об'єктів в умовах, близьких до реальних стохастичних [2].

В загальному випадку управління оцінювання [2, 3] є задачею відновлення станів системи за інформацією про її входи (управління та збурення) і виходи, визначення поточних значень таких змінних процесу, що не можуть бути безпосередньо обмірювані чи дуже забруднені зава-

дами, причому ці завдання є розв'язуваними у тому випадку, коли між даними вхід-вихід і станами можливо встановити однозначну відповідність. Особливо корисні методи оцінювання процесів, у яких недостатньо вимірювальних засобів, велика вартість окремих вимірів.

До найбільш використовуваних у практиці управління [1-4] відноситься послідовний (рекурентний) метод оцінювання, тобто метод, який дозволяє отримувати оцінки станів у темпі з процесом шляхом перерахунку вже наявних оцінок при надходженні чергової порції вимірювальної інформації, а потім використовувати оновлені оцінки у алгоритмах управління. Методи синтезу оптимального спостерігача системи представлені як у часовій [1, 2] – спостерігач неповного порядку (фільтр Люенбергера), оптимальний стохастичний спостерігач (фільтр Калмана) відновлення вектору стану системи при стохастичних впливах, так і у частотній – спектральні методи [2] синтезу засновані на ідеях методу Вінера-Колмогорова.

### Постановка задачі

В роботі об'єктом досліджень є система при випадкових впливах, вихідна

реакція якої вимірюється, відповідна структурна схема наведена на рис. 1.

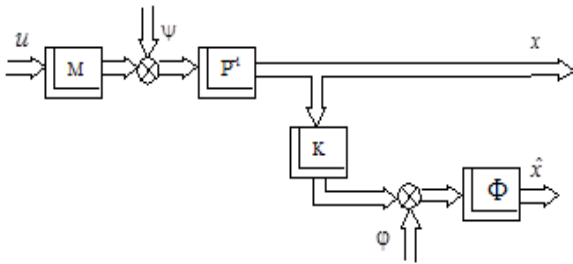


Рис. 1. Структурна схема, що пояснює процедуру спектрального методу оцінювання вихідної реакції

Рух об'єкта управління описується системою звичайних диференціальних рівнянь виразу

$$Px(t) = Mu(t) + \psi(t) \quad (1)$$

де  $P$  і  $M$  – відповідно матриці розмірності  $n \times n$  та  $n \times m$ , елементи яких – поліноми оператора  $p = d/dt$ , причому визначник матриці може мати нулі з позитивною дійсною частиною;  $x$  –  $n$ -вимірний вектор вихідних реакцій об'єкта;  $u$  –  $m$ -вимірний вектор управління, який вважається рівним нулю;  $\psi$  –  $n$ -вимірний вектор зовнішніх збурень, який являє собою багатовимірний центрований стаціонарний випадковий процес з відомою матрицею спектральних щільностей  $S_{\psi\psi}$ .

Необхідно реалізувати процедуру оптимального оцінювання, тобто сформулювати найкращу оцінку  $\hat{x}$  вектора вихідних реакцій системи.

Для отримання найкращої оцінки вихідних координат системи в реальних умовах її функціонування до складу системи вводять “спостерігачі” (рис. 1), структура яких обирається за умови отримання оптимального результату вимірювань.

Задача синтезу оптимального спостерігача [2] складається у відшуванні структури цього регулятора за умови мінімізації дисперсії помилки оцінювання. Помилка оцінювання стану системи має вид

$$\varepsilon = \hat{x} - x \quad (3)$$

Так як задача оцінювання стану об'єкта управління вирішується з метою

подальшого синтезу регулятора, то вважають, що  $u = 0$ , а рух об'єкта управління описується рівнянням (1) у вигляді

$$Px(t) = \psi(t). \quad (4)$$

Реакція об'єкта (рис. 1) вимірюється деякою системою вимірювань, а вимірювання супроводжуються завадами. Результат вимірювань запишемо як

$$y(t) = Kx(t) + \varphi(t), \quad (5)$$

де  $y$  –  $v$ -вимірний вектор вимірювань;  $K$  – матриця, елементи якої – дробово-раціональні функції оператора  $p = d/dt$ , причому елементи можуть мати полюси з позитивною дійсною частиною;  $\varphi$  – завада вимірювань, яка являє собою  $v$ -вимірний центрований випадковий процес з відомими матрицями спектральних  $S_{\varphi\varphi}$  і взаємних спектральних  $S_{\psi\varphi}$  ( $S_{\varphi\psi}$ ) щільностей.

Задачу оптимальної оцінки вектора  $x$  сформулюємо таким чином [1, 2]: одержати оцінку  $\hat{x}(t)$  вектора  $x(t)$ , найкращу в значенні мінімуму дисперсії помилки

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\omega}^{j\omega} \text{tr}(S'_{\varepsilon\varepsilon} R) ds, \quad (6)$$

де  $R$  – позитивно визначена матриця вагових коефіцієнтів;  $\text{tr}$  – слід матриці;  $S_{\varepsilon\varepsilon}$  – матриця спектральних щільностей помилки оцінювання.

Об'єктом дослідження є система з довільною динамікою, що містить стійкі та нестійкі корені об'єкту, тобто структуру об'єкту можна представити у вигляді

$$P^{-1} = P_+^{-1} + P_-^{-1}, \quad (7)$$

де  $P_+^{-1}$ ,  $P_-^{-1}$  – матриці, результати вінерівської сепарації матриці об'єкту  $P^{-1}$ , полюси яких належать лівій та правій, відповідно, напівплощинам комплексної змінної.

Виходячи з особливостей досліджуваного, об'єкт управління пропонується сформувати в системі з двома каналами оцінювання вихідної реакції об'єкту (2): канали спостереження за стійкою та нестійкою динамікою об'єкту відповідно.

Для кожного з виділених каналів (стійкого та нестійкого) пропонується си-

нтезувати оптимальний спостерігач на базі спектральних принципів за процедурою методу Вінера-Колмогорова [2] та дослідити ефективність синтезованих оптимальних структур відновлення вектору вихідних реакцій повного об'єкту при випадкових впливах,

### Рішення задачі

Задачу оптимальної оцінки вихідного стану лінійного динамічного об'єкта з довільною динамікою (7) при випадкових впливах за неповними вимірюваннями в частотній області поставимо таким чином [1, 2].

Структура, що пояснює спектральний метод оцінювання [2] стану об'єкта з довільною динамікою приведена на рис. 2.

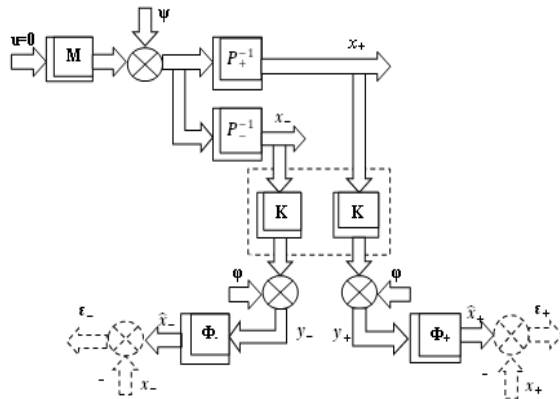


Рис. 2. Структурна схема системи оптимального спостереження стану об'єкту управління з довільною динамікою

Де на рис. 2:  $M$ ,  $P_+^{-1}$  і  $P_-^{-1}$  матриці динамічних характеристик об'єкту управління з довільною динамікою розмірів  $n \times m$  і  $n \times n$  відповідно;  $x_+$  та  $x_-$  – вектори вихідних реакцій об'єкта для стійкого та нестійкого каналів відповідно;  $u$  – вектор управління;  $\psi$ ,  $\varphi$  – вектори зовнішніх збурень та завади вимірювання, кожен з яких являє собою багатовимірний центрований стаціонарний випадковий процес з відомими матрицями спектральних щільностей  $S_{\psi\psi}$  та  $S_{\varphi\varphi}$  відповідно;  $K$  – матриця передавальних функцій вимірювача;  $y_+$  та  $y_-$  – вектори вимірювань для стійкого та нестійкого каналів відповідно;  $\Phi_+$  та  $\Phi_-$  – оптимальні спостерігачі для стійкого та нестійкого каналів відповідно, структура

та параметри яких обираються в процесі оптимального синтезу.

Будемо вважати, що за допомогою системи оцінок  $\hat{x}_+$ ,  $\hat{x}_-$  (оптимальних спостерігачів) з матрицею передаточних функцій  $\Phi_+$  та  $\Phi_-$  в кожному з сформованих каналів можна оцінити вектор вихідних реакцій розділеного об'єкта управління  $\hat{x}_+$ ,  $\hat{x}_-$  по векторам вимірюваних сигналів  $y_+$ ,  $y_-$ .

Таким чином, задача синтезу оптимальних структур спостерігачів вихідного стану багатовимірної об'єкта з довільною динамікою при випадкових збуреннях в кожному з каналів, стійкому та нестійкому, розділеного об'єкту (7) буде полягати у відшукуванні таких структур та параметрів регуляторів  $\Phi_+$ ,  $\Phi_-$ , які забезпечують мінімум часткових функціоналів якості (6) стійкого та нестійкого каналів відповідно, вигляду:

$$e_+ = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \text{tr}(S'_{\varepsilon_+\varepsilon_+} R_+) ds, \quad (8)$$

$$e_- = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \text{tr}(S'_{\varepsilon_-\varepsilon_-} R_-) ds \quad (9)$$

де  $R_+$  та  $R_-$  – позитивно визначені матриці вагових коефіцієнтів;  $S'_{\varepsilon_+\varepsilon_+}$ ,  $S'_{\varepsilon_-\varepsilon_-}$  транспоновані матриці спектральних щільностей помилки оцінювання стійкого та нестійкого каналів відповідно.

Процедуру синтезу структури оптимального спостерігача вихідного стану багатовимірної об'єкта при випадкових збуреннях приведений системі продемонстровано на прикладі нестійкого каналу оцінювання (рис.2), при цьому всі позначення відповідають вище оговореним, але характеризують динаміку нестійкого каналу досліджуваного об'єкту.

За відомою системою рівнянь типу (1), (4) [2], з врахуванням особливостей об'єкту управління (7) отримаємо формулу вихідної реакції об'єкта у нестійкому каналі:

$$x_- = P_-^{-1} \cdot \psi.$$

Вектор помилки спостереження у вказаному каналі виглядатиме:

$$\varepsilon = \hat{x}_- - x_- ,$$

де вектор оптимальних оцінок  $\hat{x}_- = \Phi_- y_-$ .

Тоді помилка спостереження матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_- &= \Phi_- \cdot y_- - x_- = \Phi_- (Kx_- + \varphi) - x_- = \\ &= \Phi_- (KP_-^{-1}\psi + \varphi) - P_-^{-1}\psi \end{aligned}$$

По теоремі Вінера-Хінчина [1, 2] транспонована матриця спектральних щільностей помилки оцінювання  $S'_{\varepsilon_- \varepsilon_-}$  дорівнює:

$$\begin{aligned} S'_{\varepsilon_- \varepsilon_-} &= \langle \varepsilon_- \varepsilon_-^* \rangle = \\ &= \Phi_- (KP_-^{-1} S'_{\psi\psi} P_-^{-1} K_*^* + S'_{\varphi\varphi}) \Phi_-^* - \\ &- \Phi_- KP_-^{-1} S'_{\psi\psi} P_-^{-1} - P_-^{-1} S'_{\psi\psi} P_-^{-1} K_*^* \Phi_-^* + \\ &+ P_-^{-1} S'_{\psi\psi} P_-^{-1} \end{aligned}$$

А функціонал якості (9) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} e_- &= \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \text{tr}[(\Phi_- (KP_-^{-1} S'_{\psi\psi} P_-^{-1} K_*^* + S'_{\varphi\varphi}) \Phi_-^* - \\ &- \Phi_- KP_-^{-1} S'_{\psi\psi} P_-^{-1} - P_-^{-1} S'_{\psi\psi} P_-^{-1} K_*^* \Phi_-^* + \\ &+ P_-^{-1} S'_{\psi\psi} P_-^{-1}) R_-] ds \end{aligned} \quad (10)$$

Розрахуємо мінімум функціонала (10) за методом Вінера-Колмогорова; для цього знаходимо першу варіацію функціонала і умову її тотожної рівності нулю:

$$\begin{aligned} \delta e_- &= \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \text{tr}(R_- ([\Phi_- (KP_-^{-1} S'_{\psi\psi} P_-^{-1} K_*^* + S'_{\varphi\varphi}) - \\ &- P_-^{-1} S'_{\psi\psi} P_-^{-1} K_*^*] \delta \Phi_-^* + \\ &+ \delta \Phi_- [(KP_-^{-1} S'_{\psi\psi} P_-^{-1} K_*^* + S'_{\varphi\varphi}) \Phi_-^* - \\ &- KP_-^{-1} S'_{\psi\psi} P_-^{-1}]) ds \end{aligned}$$

Введемо позначення:

$$\bar{G}_* \bar{G} = R_- \quad (11)$$

$$\bar{D} \bar{D}^* = KP_-^{-1} S'_{\psi\psi} P_-^{-1} K_*^* + S'_{\varphi\varphi}$$

(12)

$$\bar{T} = \bar{T}_0 + \bar{T}_+ + \bar{T}_- = \bar{G}_*^{-1} P_-^{-1} S'_{\psi\psi} P_-^{-1} K_*^* \bar{D}^{-1} \quad (13)$$

Умова рівності варіації нулю:

$$\bar{G} \Phi_- \bar{D} = \bar{T}_0 + \bar{T}_+$$

Алгоритм синтезу оптимального спостерігача вихідного стану багатовимірного об'єкта при випадкових впливах нестійкого каналу оцінювання матиме вигляд:

$$\Phi_- = \bar{G}^{-1} (\bar{T}_0 + \bar{T}_+) \bar{D}^{-1}. \quad (14)$$

Оптимальна структура спостерігача для стійкого каналу багатовимірного об'єкта при випадкових впливах обчислюється за формулою:

$$\Phi_+ = G^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1}. \quad (15)$$

Структура оптимального спостерігача в системі з довільною структурою буде складатись з двох частин, кожна з яких буде знаходитись за вхідною інформацією характеристик системи, для нестійкої – за алгоритмом (11) - (14), а для стійкої – за алгоритмом [2, (5.25-5.27)], і формуватиме найкращу оцінку вектора вихідних координат повного об'єкта з довільною динамікою (рис.2).

### Розв'язання практичної задачі

Задачу знаходження оптимальної структури спостерігача вихідного стану багатовимірного об'єкта з довільною динамікою при випадкових впливах продемонструємо на скалярному прикладі.

Вихідні дані про досліджувану систему:

- динамічні характеристики об'єкта управління з довільною динамікою, рух якого описується рівнянням (1) у вигляді (7) задані формулами:

$$P_+ = (T_1 s + 1), \quad P_- = (-T_2 s + 1),$$

де  $T_1, T_2$  – постійні часу повного об'єкта;

- передавальна функція вимірювача  $K$  системи має вигляд:

$$K=20;$$

- спектральна щільність сигналу збурення  $S'_{\psi\psi}$ :

$$S'_{\psi\psi} = \frac{b^2}{|\mu s + 1|^2}$$

де  $\mu$  – постійна часу випадкового збурення,  $b$  – коефіцієнт підсилення;

- спектральні щільності завад вимірювання стійкого та нестійкого каналів відповідно:

$$S'_{\varphi_+ \varphi_+} = \frac{a_1^2}{|\tau_1 s + 1|^2} \quad S'_{\varphi_- \varphi_-} = \frac{a_2^2}{|\tau_2 s + 1|^2}$$

де  $\tau_1, \tau_2$  – постійні часу завад вимірювання,  $a_1, a_2$  – коефіцієнти підсилення.

За допомогою вище вказаних процедур виконано синтез оптимальних структур спостерігачів вихідного стану скалярного об'єкта з довільною динамікою при випадкових збуреннях [4-5].

### Отримані результати

Результатом синтезу кожного з каналів, стійкого та нестійкого, розділеного об'єкта (7) є вигляд регуляторів  $\Phi_+$ ,  $\Phi_-$ , які забезпечують мінімум часткових функціоналів якості (7), (8) стійкого та нестійкого каналів відповідно, вигляд яких для розрахункових даних наведено у виразах:

$$F_+ = \frac{0.0026022(s+10)(s+5.566)}{(s+4.966)(s+0.6788)}$$

$$F_- = \frac{0.030066(s-16.05)}{(s-10.05)}$$

Отримані передавальні функції оптимальних спостерігачів мають особливості каналів для яких вони обираються: є стійким та нестійким відповідно.

Як результати порівняльного аналізу досліджуваної системи управління з довільною динамікою при випадкових впливах представлені такі графічні залежності:

- спектральні щільності сигналів сформованих стійкого (рис.3) та нестійкого (рис.4) каналів;

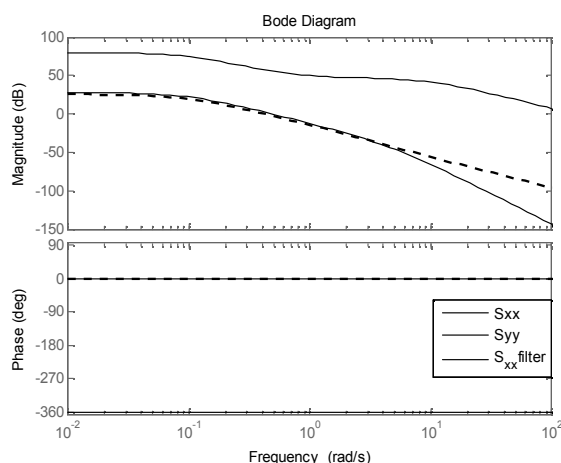


Рис.3. Порівняння спектральних щільностей випадкових сигналів стійкого каналу:

$S_{xx}$  – спектральна щільність вихідних реакцій стійкої частини розділеного об'єкта;  $S_{yu}$  – спектральна щільність сигналу вимірювань;  $S_{xx\text{filter}}$  – спектральна щільність вектору оптимальних оцінок вихідної реакції стійкої частини розділеного об'єкта

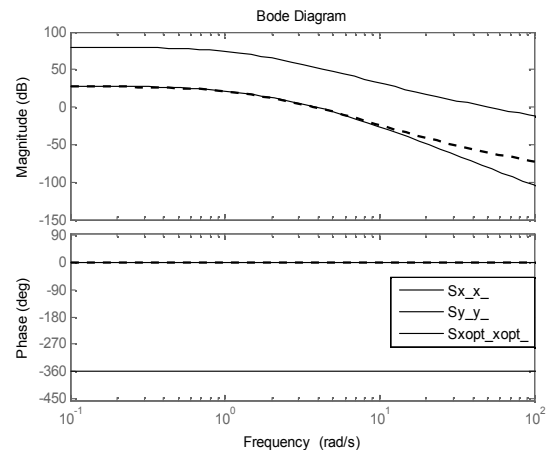


Рис.4. Порівняння спектральних щільностей випадкових сигналів нестійкого каналу:

$S_{x\_x\_}$  – спектральна щільність вихідних реакцій нестійкої частини розділеного об'єкта;  $S_{y\_y\_}$  – спектральна щільність сигналу вимірювань;  $S_{xopt\_xopt\_}$  – спектральна щільність вектору оптимальних оцінок вихідної реакції нестійкої частини розділеного об'єкта

- графічні залежності відносних дисперсій помилки оцінювання від зміни постійної часу  $\mu$  зовнішнього збурення  $\psi$  сформованих стійкого (рис.5) та нестійкого (рис.6) каналів;

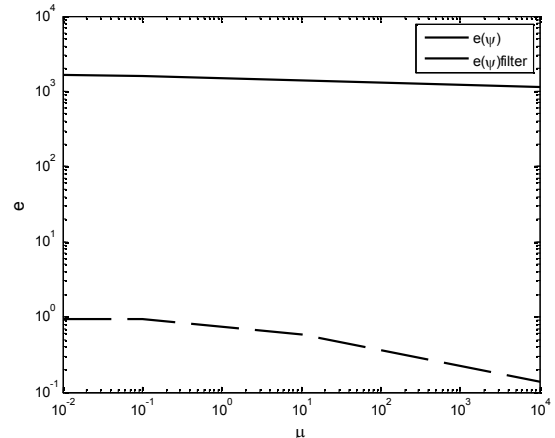


Рис.5. Порівняння відносних дисперсій помилки оцінювання стійкого каналу при зміні параметрів зовнішнього збурення:

$e(\psi)$  – відносний показник якості стійкого каналу без спостерігача та  $e(\psi)\text{filter}$  – зі спостерігачем  $\Phi_+$  відповідно

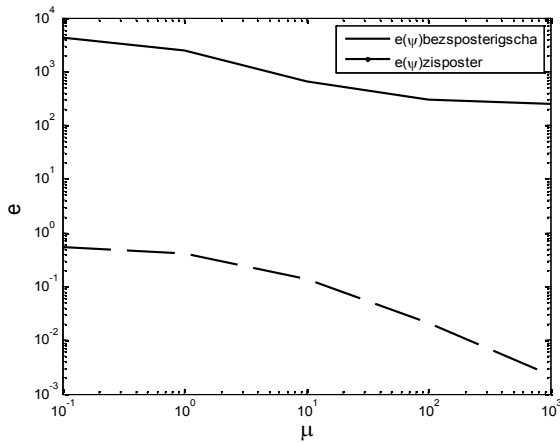


Рис. 6. Порівняння відносних дисперсій помилки оцінювання нестійкого каналу при зміні параметрів зовнішнього збурення:  $e(\psi)_{\text{bezposterigscha}}$  – відносний показник якості нестійкого каналу без спостерігача та  $e(\psi)_{\text{zisposter}}$  – зі спостерігачем  $\Phi_-$  відповідно

- графічні залежності відносних дисперсій помилки оцінювання від зміни постійних часу  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  завад вимірювання  $\varphi$  сформованих стійкого (рис.7) та нестійкого (рис. 8) каналів;

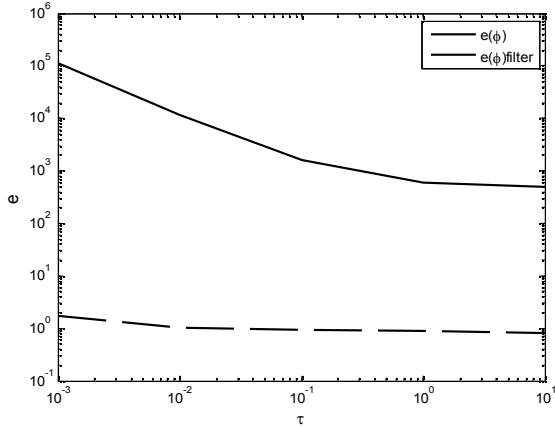


Рис.7. Порівняння відносних дисперсій помилки оцінювання стійкого каналу при зміні параметрів завад вимірювань:  $e(\varphi)$  – відносний показник якості стійкого каналу без спостерігача та  $e(\varphi)_{\text{filter}}$  – зі спостерігачем  $\Phi_+$  відповідно

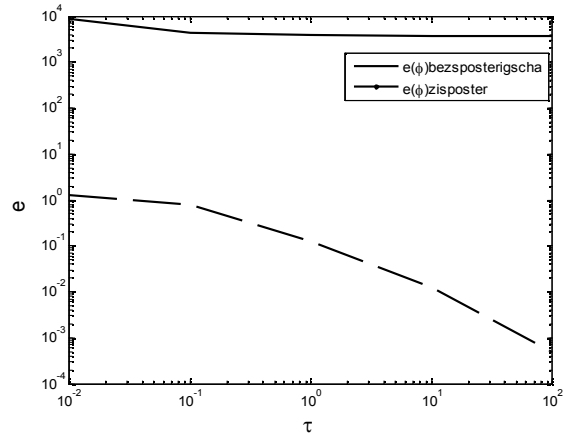


Рис. 8. Порівняння відносних дисперсій помилки оцінювання нестійкого каналу при зміні параметрів завад вимірювань:  $e(\varphi)_{\text{bezposterigscha}}$  – відносний показник якості нестійкого каналу без спостерігача та  $e(\varphi)_{\text{zisposter}}$  – зі спостерігачем  $\Phi_-$  відповідно

- спектральні щільності вихідних реакцій повного об'єкта з довільною динамікою та суми двох сформованих каналів, стійкого та нестійкого (рис. 2) з синтезованими оптимальними спостерігачами  $\Phi_+$ ,  $\Phi_-$  в кожному з каналів відповідно (рис. 9).

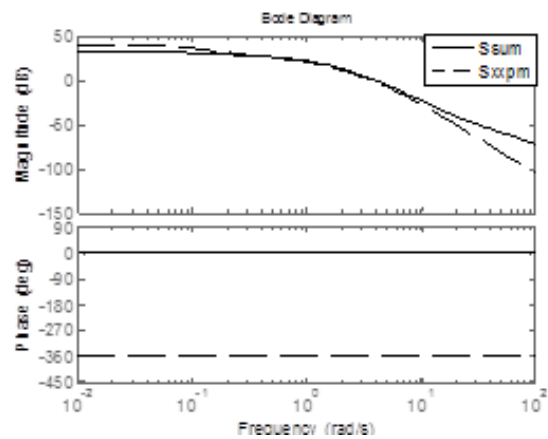


Рис.9 Порівняння спектральних щільностей вихідних реакцій повного об'єкта з довільною динамікою та суми двох сформованих оптимальних каналів:

$S_{xxpm}$  – спектральна щільність вихідної реакції повного об'єкта;  $S_{sum}$  – спектральна щільність вихідних реакцій суми двох сформованих каналів, стійкого та нестійкого (рис. 2) з синтезованими оптимальними спостерігачами.

**Висновки**

1. На практичному прикладі проілюстровано варіант синтезу оптимального спостерігача вихідного стану об'єкта в системі з довільною динамікою при випадкових впливах за методом Вінера-Колмогорова шляхом розділення каналів на стійкий і нестійкий.

2. Показано (рис.3, 9) що синтезовані запропонованим методом оптимальні спостерігачі  $\Phi_+$ ,  $\Phi_-$  дають змогу отримати найкращу оцінку вихідних реакцій досліджуваного об'єкту як в окремих каналах, стійкому та нестійкому (рис.3, 4) так і повного об'єкта з довільною динамікою (рис.9).

3. Дослідження системи з довільною динамікою початкової структури та оптимального варіанту при варіації параметрів експлуатаційних характеристик (постійних часу зовнішнього збурення та завад вимірювання) свідчать про достатній рівень ефективності (рис.5–рис.8) та адаптивність синтезованих стійкого та нестійкого каналів до мінливості вказаних параметрів.

4. Наочно показано, що запропонований варіант синтезу оптимального спостерігача вихідного стану багатовимірної об'єкта в системі з довільною динамікою при випадкових впливах шляхом розділення каналів на стійкий і нестійкий дозволяє сформулювати найкращу оцінку вказаного об'єкта, що складатиме в подальшому значущу частину алгоритмів оптимального управління вказаними системами.

**Список літератури:**

1. Аналітичне конструювання вимірювальних систем. Спектральні алгоритми: Навч. метод. посіб./ В.М. Азарсков, М.Ю. Буриченко, О.М. Савінов, О.А. Сущенко. – К.: НАУ, 2002. – 88 с.

2. Блохін Л.М., Буриченко М.Ю. Статистична динаміка систем управління / Підручник для ВНЗ – К.: НАУ, 2003. – 203 с.

3. Андреев Н.Ч. Теория статистически оптимальных систем управления// М.: Наука, 1980. – 415 с.

4. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп; Пер. с англ. Б.И. Копылова. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004. – 832 с.

5. Лазарев Ю.Ф. MatLAB 5.x – К.: Издательская группа ВHV, 2000. – 386 с.

Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 616 с.

Статтю подано до редакції 18.12.2014